

全品



教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30<sup>+</sup>年创始人专注教育行业

# 全品学练考

AI智慧教辅

主编 肖德好

导学案

高中数学

基础版

选择性必修第三册 RJA

本书为AI智慧教辅

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。



天津出版传媒集团  
天津人民出版社

# CONTENTS

# 目录

导学案

## 06 第六章 计数原理

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| PART SIX              |     |
| 6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 | 107 |
| 第1课时 两个计数原理及简单应用      | 107 |
| 第2课时 两个计数原理的综合应用      | 109 |
| 6.2 排列与组合             | 111 |
| 6.2.1 排列              | 111 |
| 6.2.2 排列数             | 113 |
| 第1课时 排列数及简单应用         | 113 |
| 第2课时 排列的综合问题          | 115 |
| 6.2.3 组合              | 117 |
| 6.2.4 组合数             | 117 |
| 第1课时 组合与组合数公式         | 117 |
| 第2课时 组合的综合应用          | 119 |
| 6.3 二项式定理             | 122 |
| 6.3.1 二项式定理           | 122 |
| 6.3.2 二项式系数的性质        | 125 |
| 🔗 本章总结提升              | 127 |

## 07 第七章 随机变量及其分布

|                  |     |
|------------------|-----|
| PART SEVEN       |     |
| 7.1 条件概率与全概率公式   | 129 |
| 7.1.1 条件概率       | 129 |
| 第1课时 条件概率与乘法公式   | 129 |
| 第2课时 条件概率的性质及应用  | 131 |
| 7.1.2 全概率公式      | 133 |
| 7.2 离散型随机变量及其分布列 | 135 |
| 7.3 离散型随机变量的数字特征 | 138 |
| 7.3.1 离散型随机变量的均值 | 138 |
| 7.3.2 离散型随机变量的方差 | 140 |
| 7.4 二项分布与超几何分布   | 143 |
| 7.4.1 二项分布       | 143 |
| 第1课时 二项分布        | 143 |
| 第2课时 二项分布的均值与方差  | 145 |
| 7.4.2 超几何分布      | 146 |
| 7.5 正态分布         | 149 |
| 🔗 本章总结提升         | 152 |

## 08 第八章 成对数据的统计分析

|                      |     |
|----------------------|-----|
| PART EIGHT           |     |
| 8.1 成对数据的统计相关性       | 157 |
| 8.2 一元线性回归模型及其应用     | 161 |
| 第1课时 一元线性回归模型及最小二乘估计 | 161 |
| 第2课时 非线性回归模型         | 164 |
| 8.3 列联表与独立性检验        | 165 |
| 🔗 本章总结提升             | 168 |

|        |     |
|--------|-----|
| ◆ 参考答案 | 173 |
|--------|-----|

## 第六章 计数原理

### 6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

#### 第1课时 两个计数原理及简单应用

##### 【学习目标】

1. 通过实例,能归纳总结出分类加法计数原理、分步乘法计数原理.
2. 正确地理解“完成一件事情”的含义,能根据具体问题的特征,选择“分类”或“分步”.
3. 能根据具体问题的特征,选择两种计数原理解决一些实际问题,发展数学建模和数学运算的核心素养.

##### 课堂明新知

知识导学 典例探究

##### ◆ 要点一 分类加法计数原理

###### 新知构建

定义:完成一件事有\_\_\_\_\_不同方案,在第1类方案中有\_\_\_\_\_种不同的方法,在第2类方案中有\_\_\_\_\_种不同的方法,那么完成这件事共有  $N =$  \_\_\_\_\_种不同的方法.

如果完成一件事情有  $n$  类不同方案,在第  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 类中有  $a_k$  种不同的方法,那么完成这件事共有  $N =$  \_\_\_\_\_种不同的方法.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分类加法计数原理中,两类不同方案中的方法可以相同. ( )

(2)在分类加法计数原理中,每类方案中的方法都能完成这件事. ( )

###### 典例解析

**例1** (1)[教材 P5T1(1)改编] 一项工作可以用两种方法完成,有4人只会用第一种方法完成,有3人只会用第二种方法完成,另有2人两种方法都会,从中选择1人完成这项工作,则不同选法的种数是\_\_\_\_\_.

(2)在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数的个数为\_\_\_\_\_.

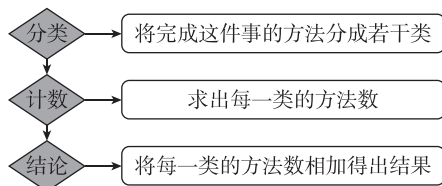
**变式** 某市的有线电视可以接收中央台12个频道、本地台10个频道和其他省市46个频道的节目.

(1)当这些频道播放的节目互不相同时,一台电视机共可以选看多少个不同的节目?

(2)如果有3个频道正在转播同一场球赛,其余频道正在播放互不相同的节目,一台电视机共可以选看多少个不同的节目?

##### [素养小结]

利用分类加法计数原理计数时的解题流程



【提醒】(1)确定分类标准时要确保每一类都能独立地完成这件事.

(2)检查所分类型是否包含所有情况,确保不重不漏.

## ◆ 要点二 分步乘法计数原理

### 新知构建

定义:完成一件事需要\_\_\_\_\_步骤,做第1步有\_\_\_\_\_种不同的方法,做第2步有\_\_\_\_\_种不同的方法,那么完成这件事共有  $N =$  \_\_\_\_\_种不同的方法.

如果完成一件事情需要  $n$  个步骤,做第  $k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 步有  $a_k$  种不同的方法,那么完成这件事共有  $N =$  \_\_\_\_\_种不同的方法.

**【诊断分析】** 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)在分步乘法计数原理中,每个步骤中完成这个步骤的方法是各不相同的. ( )
- (2)在分步乘法计数原理中,事情如果是分两步完成的,那么其中任何一个单独的步骤都不能完成这件事,只有两个步骤都完成后,这件事情才算完成. ( )

### 典例解析

**例2** (1)[2025·四川南充高二期中] 现有3个班分别从3个景点中选择1个游览,不同选法的种数是 ( )

- A. 27                      B. 9  
C. 3                        D. 1

(2)[2025·天津河北区高二期中] 在高二某班级中,有4名同学要参加足球、篮球、乒乓球三项比赛,每人仅选择一项参加,其中甲同学无法参加足球比赛,则不同的参加方法种数为 ( )

- A. 12                      B. 16  
C. 54                      D. 81

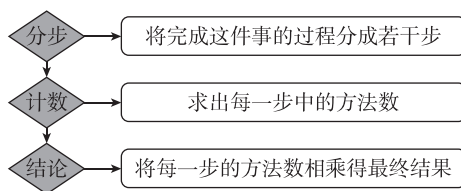
**变式** (1)若4名学生报名参加数学、计算机、航模兴趣小组,每人选报1项,则不同的报名方式有 ( )

- A.  $3^4$  种                      B.  $4^3$  种  
C.  $3 \times 2 \times 1$  种              D.  $4 \times 3 \times 7$  种

(2)人们习惯把最后一位是6的多位数叫作“吉祥数”,则无重复数字的四位“吉祥数”(首位不能是零)共有\_\_\_\_\_个.

### 【素养小结】

利用分步乘法计数原理计数时的解题流程



**【提醒】** (1)要按照事件发生的过程合理分步.

(2)分步时要注意各步骤互相依存,不能遗漏步骤,只有各步骤都完成才算完成这件事.

## ◆ 要点三 两个计数原理的简单应用

**例3** [教材P5例3改编] 高二(1)班有6人参加数学小组,(2)班有5人参加物理小组,(3)班有4人参加化学小组.

- (1)选其中1人担任数理化小组组长,有多少种不同的选法?
- (2)每班选1人参加全国数理化竞赛,有多少种不同的选法?
- (3)选取其中2人参加不同的学科竞赛,有多少种不同的选法?

**变式** 高二(1)班、(2)班、(3)班分别有 7,5,9 名学生参加创新技能大赛笔试.

(1) 如果选一人当组长,那么有多少种不同的选法?

(2) 如果老师任组长,每班选一名副组长,那么有多少种不同的选法?

(3) 如果推选 2 名学生参赛,要求这 2 人来自不同的班级,那么有多少种不同的选法?

#### [素养小结]

利用两个计数原理解题时的三个注意点

(1) 当题目无从下手时,可考虑要完成的这件事是什么,即怎样做才算完成这件事,然后给出完成这件事的一种或几种方法,从这几种方法中归纳出解题方法.

(2) 分类时标准要明确,做到不重不漏,有时要恰当画出示意图或树状图,使问题的分析更直观、清楚,便于探索规律.

(3) 综合问题要考虑是先分类还是先分步.

## 第 2 课时 两个计数原理的综合应用

### 课堂明新知

知识导学 典例探究

#### ◆ 要点一 数字组数问题

**例 1** 用 0,1,2,3,⋯,9 这十个数字.

(1) 可组成多少个三位数?

(2) 可组成多少个无重复数字的三位数?

(3) 可组成多少个小于 500 且没有重复数字的自然数?

**变式** [2025·江苏扬州高二期中] 用 0,1,2,3,4,5,6 这七个数字.

- (1) 可以组成多少个无重复数字的四位偶数?
- (2) 选出一个偶数和三个奇数,组成无重复数字的四位数,这样的四位数共有多少个?

**[素养小结]**

解决组数问题的方法

- (1) 对于组数问题,一般按特殊位置(一般是末位和首位)优先的方法分类或分步完成;如果正面分类较多,可采用间接法从反面求解.
- (2) 解决组数问题,应特别注意其限制条件,有些条件是隐藏的,要善于挖掘.组数时,要注意特殊元素、特殊位置优先的原则.

**[提醒]** 数字“0”不能排在两位数字或两位数字以上的数的最高位.

**◆ 要点二 选(抽)取分配问题**

**例 2** 现有甲、乙、丙、丁、戊五类不同的书,放入四个窗格的书架中.若甲、乙两类书必须放在同一窗格,丙、丁、戊分别放到剩余三个窗格内,共有多少种放法?

**变式** (1) 高三年级的三个班级到甲、乙、丙、丁四个工厂进行社会实践,其中甲工厂必须有班级去,则不同的分配方案共有 ( )

- A. 16 种
- B. 18 种
- C. 37 种
- D. 48 种

(2) 将 2 名女生和 3 名男生分配到两个不同的兴趣小组,要求每个兴趣小组分配男生、女生各 1 人,则不同的分法种数为\_\_\_\_\_.

**[素养小结]**

解决抽取(分配)问题的方法

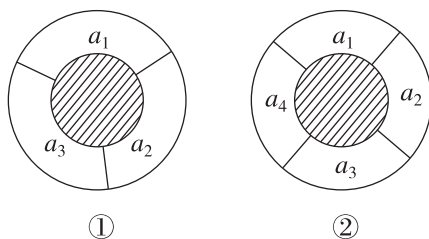
- (1) 当涉及对象数目不大时,一般选用枚举法、树状图法、框图法或者图表法.
- (2) 当涉及对象数目较大时,一般有两种方法:
  - ① 直接使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理.一般地,若抽取是有顺序的,则按分步进行;若按对象特征抽取,则按分类进行.
  - ② 间接法:去掉限制条件计算所有的抽取方法数,然后减去所有不符合条件的抽取方法数即可.

### ◆ 要点三 涂色(种植)问题

**例 3** 一个同心圆形花坛分为两部分,中间小圆部分种植草坪和绿色灌木,周围的圆环分为  $n(n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$  等份,种植红、黄、蓝三种颜色不同的花,要求相邻两部分种植不同颜色的花.

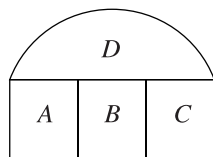
(1)如图①,圆环分成 3 等份,分别为  $a_1, a_2, a_3$ ,则有多少种不同的种植方法?

(2)如图②,圆环分成 4 等份,分别为  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ,则有多少种不同的种植方法?



**变式** (1)用 4 种不同的颜色涂在四棱锥的各个面上,要求相邻两面不同色,有 \_\_\_\_\_ 种不同的涂法.

(2)[2025·江西萍乡高二期中] 如图,提供 4 种不同的颜色给图中  $A, B, C, D$  四块区域涂色,若相邻的区域不能涂同一种颜色,则不同的涂法共有 \_\_\_\_\_ 种.



#### [素养小结]

求解涂色(种植)问题一般是直接利用两个计数原理求解,常用方法有:

(1)按区域的不同以区域为主分步计数,用分步乘法计数原理分析;

(2)以颜色(种植作物)为主分类讨论,适用于“区域、点、线段”问题,用分类加法计数原理分析;

(3)对于空间中的涂色问题,将空间问题平面化,转化为平面区域涂色问题.

## 6.2 排列与组合

### 6.2.1 排列

#### 【学习目标】

1. 通过实例,理解排列的概念,能准确判断排列问题.
2. 能用列举法、树状图写出一个排列问题的所有排列.
3. 能用分类加法计数原理和分步乘法计数原理解决简单的排列问题.

#### 课堂明新知

知识导学 典例探究

### ◆ 要点一 排列的概念

#### 新知构建

(1)排列的定义:一般地,从  $n$  个不同元素中取出  $m(m \leq n)$  个元素,并按照 \_\_\_\_\_ 排成一列,叫作从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个排列.

(2)两个排列相同的充要条件:两个排列的 \_\_\_\_\_ 完全相同,且元素的 \_\_\_\_\_ 也相同.

**注意:**由排列的定义可知,排列与元素的顺序有关,这也是判断是否为排列问题的主要依据.

**【诊断分析】**判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)1,2,3 与 3,2,1 为同一排列. ( )
- (2)在一个排列中,同一个元素不能重复出现. ( )
- (3)从 1,2,3,4 中任选两个数字,就组成一个排列. ( )
- (4)从 5 名同学中任选 2 名同学分别参加数学和物理竞赛的所有不同的选法是一个排列问题. ( )

## D 典例解析

**例 1** 判断下列问题是否是排列问题,并说明理由.

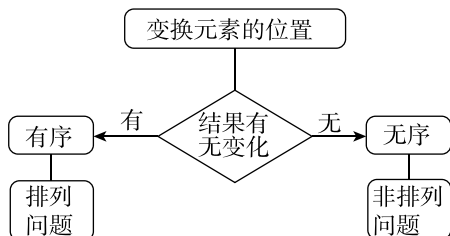
- (1)从 1,2,3,4 四个数字中,任选两个做加法,其结果有多少种不同的可能?
- (2)从 1 到 10 这十个自然数中任取两个不同的数组成直角坐标平面内的点的坐标,可得到多少个不同的点的坐标?
- (3)从十名同学中任选两名同学去学校开座谈会,有多少种不同的选取方法?
- (4)某商场有四个大门,若从一个大门进去,购买物品后,再从另一个大门出来,不同的出入方式有多少种?

**变式** (多选题)下列问题是排列问题的是 ( )

- A. 从 10 个人中选 2 人分别去种树和扫地
- B. 从 10 个人中选 2 人去扫地
- C. 从班上 30 名男生中选出 5 人组成一个篮球队
- D. 从数字 5,6,7,8 中任取两个不同的数进行幂运算

[素养小结]

1. 排列中的注意事项:(1)互异性;(2)有序性.
2. 技巧突破



## ◆ 要点二 用树状图解决排列中的列举问题

- 例 2** (1)从 1,2,3,4 四个数字中任取两个数字组成没有重复数字的两位数,一共可以组成多少个?  
 (2)从语文书、数学书、英语书、物理书 4 本书中任意取出 3 本分给甲、乙、丙三人,每人一本,试将所有的分法列举出来.  
 (3) $A, B, C, D$  四人站成一排,其中  $A$  不站排头,一共有多少种不同的站法?

**变式** (1)由 1,2,3,4 这四个数字组成的首位数字是 1,且恰有三个相同数字的四位数有 ( )

- A. 9 个
- B. 12 个
- C. 15 个
- D. 18 个

(2)元旦来临之际,某寝室四名同学各有一张贺卡,并且要送给该寝室的其中一名同学,每人都必须得到一张,则不同的送法有 ( )

- A. 6 种
- B. 9 种
- C. 11 种
- D. 23 种

[素养小结]

利用树状图法解决简单排列问题的适用范围及策略

(1)适用范围:树状图在解决排列元素个数不多的问题时,是一种比较有效的表示方式.

(2)策略:在操作中先将元素按一定顺序排出,然后以先安排哪个元素为分类标准进行分类,再安排第二个元素,并按此元素分类,依次进行,直到完成一个排列,这样能做到不重不漏,然后再按树状图写出排列.

◆ 要点三 用计数原理解排列问题

**例 3** (1)[教材 P16 例 1 改编] 从 7 本不同的书中选出 3 本送给 3 位同学,每人一本,不同的选法种数是 ( )

A.  $3^7$                                       B.  $7^3$

C. 21                                         D. 210

(2)[2025·深圳罗湖区高二期中] 从 A,B,C 等 7 人中选 5 人排成一排,若 A 必须在内,则有 \_\_\_\_\_ 种排法.(用数字作答)

**变式** 某中学环保社团计划利用社团前空地栽种五棵高矮不一样的树木,其中最高和最矮的两棵树木种在两头的的方法有 ( )

A. 6 种                                      B. 12 种

C. 24 种                                    D. 48 种

**[素养小结]**

1. 先判断是不是排列问题.

2. 在排列个数较多且明确需要完成的事情的情况下,可采用分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决.

6.2.2 排列数

第 1 课时 排列数及简单应用

【学习目标】

- 1. 理解排列数公式,能利用排列数公式进行计算和证明.
- 2. 进一步理解排列的概念,掌握一些排列问题的常用解决方法.
- 3. 能应用排列知识解决实际问题.

课堂明新知 知识导学 典例探究

◆ 要点一 用排列数公式进行化简与证明

**新知构建**

|          |                                                                                        |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 排列数定义及表示 | 把从 $n$ 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有 _____,叫作从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的排列数,用符号 $A_n^m$ 表示 |
| 全排列的概念   | 把 $n$ 个不同的元素 _____ 的一个排列                                                               |
| 阶乘的概念    | 正整数 1 到 $n$ 的连乘积,叫作 $n$ 的阶乘,用 $n!$ 表示                                                  |
| 排列数公式    | $A_n^m =$ _____                                                                        |
|          | 阶乘式 $A_n^m =$ _____ ( $n, m \in \mathbf{N}^*, m \leq n$ )                              |
| 特殊情况     | $A_n^n =$ _____, $0! =$ _____                                                          |

**【诊断分析】** 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)从  $n(n \geq 2)$  个人中选出 2 个人,分别从事两项不同的工作,可以用  $A_n^2$  表示. ( )

(2)集合  $P = \{x | x = A_4^m, m \in \mathbf{N}^*\}$ ,则  $m$  的取值个数是 4. ( )

(3)将 8 名同学排成两排,每排 4 人,则不可以用  $A_8^8$  表示. ( )

(4) $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$ . ( )

(5) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ . ( )

**典例解析**

**例 1** [教材 P19 例 3 改编] 计算:(1)  $A_{10}^4$ ;

(2)  $A_9^4 - A_9^3$ ; (3)  $\frac{A_{12}^8}{A_{12}^7}$ ; (4)  $\frac{A_{10}^2 A_7^7}{10!}$ .

**变式** (1)  $A_6^6 - 6A_5^5 + 5A_4^4 =$  \_\_\_\_\_.

(2)  $(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-15)$  ( $x \in \mathbf{N}_+$ ,  $x > 15$ ) 可表示为 ( )

- A.  $A_{x-2}^{13}$                       B.  $A_{x-2}^{14}$   
C.  $A_{x-15}^{13}$                       D.  $A_{x-15}^{14}$

**例 2** (1) 解方程:  $A_{2n}^3 = 28A_n^2$ .

(2) 求证:  $A_{n+1}^{n+1} - A_n^n = n^2 A_{n-1}^{n-1}$ .

**变式** (1) 满足  $3A_x^3 = 2A_{x+1}^2 + 6A_x^2$  的  $x$  的值为 \_\_\_\_\_.

(2) 求证:  $A_n^m = n A_{n-1}^{m-1}$  ( $m, n \in \mathbf{N}^*$  且  $n \geq m \geq 2$ ).

## [素养小结]

### 1. 排列数的计算方法

(1) 排列数的计算主要是利用排列数的乘积公式进行, 连续正整数的积可以写成某个排列数;

(2) 应用排列数公式的阶乘形式时, 一般写出它们的式子后, 再提取公因式.

### 2. 排列数的化简与证明技巧

应用排列数公式可以对含有排列数的式子进行化简和证明, 化简的过程中要对排列数进行变形, 并要熟悉排列数之间的内在联系. 解题时要灵活地运用如下变式:

$$\textcircled{1} n! = n(n-1)!; \textcircled{2} A_n^m = n A_{n-1}^{m-1};$$

$$\textcircled{3} n \cdot n! = (n+1)! - n!; \textcircled{4} \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

**[提醒]** 在解含有排列数的方程或不等式时, 必须注意  $A_n^m$  中  $m \in \mathbf{N}^*$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$  且  $m \leq n$  这些限制条件. 在解出方程或不等式后, 要进行检验, 把不合题意的解舍掉.

## ◆ 要点二 排列数公式的简单应用

**例 3** (1) 将 5 个不同的球放入 8 个不同的盒子中, 每个盒子里至多放 1 个球, 则不同的放法有 ( )

- A.  $A_8^5$  种                      B.  $C_8^5$  种  
C.  $5^8$  种                      D.  $8^5$  种

(2) [2025 · 浙江台州高二期末] 由 1, 2, 3, 4 四个数字组成无重复数字的四位偶数有 ( )

- A.  $4^4$  个                      B. 24 个  
C. 12 个                      D. 6 个

**变式** (1) [教材 P20T3 改编] 10 个人走进只有 6 把不同椅子的屋子, 若每把椅子必须且只能坐一人, 则不同坐法的种数为 ( )

- A. 6                              B.  $A_{10}^6$   
C.  $10^6$                           D.  $6^{10}$

(2) [2025 · 北京顺义区高二期中] 某班周一上午共有四节课, 计划安排语文、数学、美术、体育各一节, 要求数学不排在第一节和第四节, 则该班周一上午不同的排课方案共有 ( )

- A. 24 种                      B. 18 种  
C. 12 种                      D. 6 种

## 第2课时 排列的综合问题

### 课堂明新知

知识导学 典例探究

#### ◆ 要点一 特殊元素(位置)问题

**例1** 有5名同学站成一排拍照.

- (1)甲、乙必须站一起,共有多少种不同的排法?
- (2)最左端只能排甲或乙,且最右端不能排甲,共有多少种不同的排法?
- (3)甲必须站正中间,并且乙、丙不能相邻,共有多少种不同的排法?

**变式** [2025·江苏苏州高二期末] 一场晚会有4个演唱节目和2个舞蹈节目,要求排出一个节目单.

- (1)2个舞蹈节目不排在开始和结尾,有多少种排法?
- (2)前三个节目要有舞蹈节目,有多少种排法?

#### [素养小结]

处理有特殊元素的排列问题常从以下两方面入手:

- (1)从特殊元素入手,先给特殊元素安排位置,再把其他元素安排在其他位置上;
  - (2)从位置入手,先安排特殊位置,再安排其他位置.
- 如果直接分类情况较多,那么可采用间接法求解.

#### ◆ 要点二 相邻与不相邻问题

**例2** 甲、乙、丙、丁、戊五名同学站成一排拍照.

- (1)甲、乙两人不相邻的站法共有多少种?
- (2)甲不站排头或排尾,且甲、乙两人相邻的站法共有多少种?

**变式** [2025·山东枣庄高二期中] 有4名男同学和3名女同学(甲、乙、丙)站成一排.

(1)3名女同学必须排在一起,有多少种不同的排法?

(2)任何2名女同学都不相邻,有多少种不同的排法?

(3)甲、乙两人相邻,但都不与丙相邻,有多少种不同的排法?

**变式** 7人站成一排.

(1)甲必须在乙的左边(不一定相邻),有多少种不同的排法?

(2)甲、乙、丙三人自左向右的顺序不变(不一定相邻),有多少种不同的排法?

#### [素养小结]

(1)元素相邻问题一般用“捆绑法”,先把相邻的若干个元素“捆绑”为一个大元素与其余元素全排列,然后再松绑,将这若干个元素内部全排列.

(2)元素不相邻问题一般用“插空法”,先将不相邻元素以外的“普通”元素全排列,然后在“普通”元素之间及两端形成的空中插入不相邻元素.

### ◆ 要点三 定序问题

**例3** 将 $A, B, C, D, E$ 这5个字母排成一列,要求 $A, B, C$ 在排列中的顺序为“ $A, B, C$ ”或“ $C, B, A$ ”(可以不相邻),有多少种不同的排列方法?

#### [素养小结]

在有些排列问题中,某些元素的前后顺序是确定的,解决这类问题的基本方法有两个:

(1)整体法,即若有 $(m+n)$ 个元素排成一列,其中 $m$ 个元素之间的先后顺序确定不变,将这 $(m+n)$ 个元素排成一列,有 $A_{m+n}^{m+n}$ 种不同的排法;然后任取一个排列,固定其他 $n$ 个元素的位置不动,把这 $m$ 个元素交换顺序,有 $A_m^m$ 种排法,其中只有一个排列是我们需要的,

因此共有 $\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种满足条件的不同排法.

(2)插空法,即 $m$ 个元素之间的先后顺序确定不变,因此先排这 $m$ 个元素,只有一种排法,然后把剩下的 $n$ 个元素分类或分步插入由以上 $m$ 个元素形成的空中.



## 6.2.3 组合

## 6.2.4 组合数

### 第1课时 组合与组合数公式

#### 【学习目标】

1. 通过实例,理解组合的意义,并能写出一些简单问题的所有组合.
2. 理解组合数的概念.
3. 学会运用组合的概念,分析简单的实际问题.
4. 会应用组合数公式及性质求值、化简和证明.
5. 能解决有关组合的实际问题.

#### 课堂明新知

知识导学 典例探究

#### ◆ 要点一 组合的概念

##### 新知构建

1. 组合的定义:一般地,从\_\_\_\_\_个不同元素中取出\_\_\_\_\_ ( $m \leq n$ ) 个元素\_\_\_\_\_,叫作从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个组合.

2. 排列与组合的异同点:

|     | 排列                                    | 组合          |
|-----|---------------------------------------|-------------|
| 相同点 | 从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ ( $m \leq n$ ) 个元素 |             |
| 不同点 | 与元素的顺序_____                           | 与元素的顺序_____ |

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)两个组合相同的充要条件是其中的元素完全相同. ( )
- (2)从  $a, b, c$  三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是  $a, b$  或  $a, c$  或  $b, c$ . ( )
- (3)“从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名去参加某两个乡镇的社会调查,有多少种不同的选法”是组合问题. ( )
- (4)“现将 4 枚相同的抗战胜利纪念币送给 10 人中的 4 人留念,有多少种送法”是排列问题. ( )
- (5)“ $abc$ ”与“ $bca$ ”是相同的排列,不是相同的组合. ( )

#### 典例解析

例 1 判断下列问题是组合问题还是排列问题.

- (1)若集合  $A = \{a, b, c, d\}$ , 则集合  $A$  的含有 3 个元素的子集有多少个?
- (2)某铁路线上有 4 个车站,则这条铁路线上需准备多少种车票?
- (3)从 10 个人中选出 3 个人为代表去开会,有多少种选法?
- (4)三个人去做 5 种不同的工作,每人做 1 种,有多少种分工方法?
- (5)把 3 本相同的书分给 5 名学生,每人最多得一本,有多少种分配方法?

变式 (多选题)下列问题是组合问题的是 ( )

- A. 把 5 本不同的书分给 5 名学生,每人一本
- B. 从 7 本不同的书中取出 5 本给某个同学
- C. 10 个人相互发微信,共发几次微信
- D. 10 个人互相通一次电话,共通了几次电话

[素养小结]

区分排列与组合的方法

首先弄清楚事件是什么,区分的标志是有无顺序,而区分有无顺序的方法是:把问题的一个选择结果写出来,然后交换这个结果中任意两个元素的位置,看是否会产生新的变化,若有新变化,则说明有顺序,是排列问题;若无新变化,则说明无顺序,是组合问题.

◆ 要点二 用组合数公式进行化简与证明

 新知构建

|       |                                                                               |                                                                                        |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 组合数定义 | 从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ ( $m \leq n$ ) 个元素的 _____ 的个数,叫作从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的组合数 |                                                                                        |
| 表示法   | _____                                                                         |                                                                                        |
| 组合数公式 | 乘积式                                                                           | $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1)}{m!}$ |
|       | 阶乘式                                                                           | $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$                                                          |
| 性质    | $C_n^m = C_n^{n-m}$ , $C_n^0 = 1$                                             |                                                                                        |
| 备注    | ① $n, m \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \leq n$ ; ② 规定: $C_n^0 = 1$                    |                                                                                        |

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 从  $a, b, c$  三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是  $C_3^2$ . ( )

(2)  $C_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ . ( )

(3) 从 1, 3, 5, 7 中任取两个数相乘可得  $C_4^2$  个积. ( )

 典例解析

例 2 (1) 计算:  $C_{10}^4 - C_7^3 \cdot A_3^3$ .

(2) 计算:  $C_{3n}^{3n-n} + C_{21+n}^{3n}$ .

(3) 计算:  $C_3^3 + C_4^3 + \cdots + C_{10}^3$ .

例 3 [教材 P25T2 改编] 证明: (1)  $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$ ; (2)  $C_{m+2}^n = C_m^n + 2C_m^{n-1} + C_m^{n-2}$ .

[素养小结]

进行组合数的相关计算时,注意以下几点:

(1) 像排列数公式一样,公式  $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$  一般用于计算;而公式

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  及  $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m}$  一般用于证明、解方程(不等式)等.

(2) 要注意公式  $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m}$  的逆向运用,如例 2(1)中可利用“ $C_7^3 A_3^3 = A_7^3$ ”简化计算过程.

(3) 在解决与组合数有关的问题时,要注意隐含条件“ $m \leq n$  且  $m, n \in \mathbf{N}^*$ ”的运用.

(4) 例 2(1)所推导的结论“ $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$ ”以及它的变形公式是非常重要的公式,应熟练掌握.

◆ 要点三 简单的组合问题

例 4 [2025·重庆渝中区高二期中] 从 3 名男同学和 5 名女同学中选择 4 名同学去参加志愿者活动.

(1) 共有多少种不同的选法?

(2) 既有男同学又有女同学的选法有多少种?

**变式** [教材 P25 例 7 改编] 从含有 3 件次品的 10 件产品中,任意抽取 4 件进行检验.

- (1)抽出的产品都是合格品的抽法有多少种?  
(2)抽出的产品中恰好有 2 件是次品的抽法有多少种?

(3)抽出的产品中至多有 2 件是次品的抽法有多少种?

#### [素养小结]

简单的组合问题的解题思路及注意点:

- (1)解简单的组合问题时,首先要判断它是不是组合问题,排列问题与元素顺序有关,而组合问题与元素的顺序无关.  
(2)在分类和分步时,一定要注意有无重复或遗漏.

## 第 2 课时 组合的综合应用

### 课堂明新知

知识导学 典例探究

#### ◆ 要点一 有限制条件的组合问题

角度 1 “含有”与“至少”问题

**例 1** 有男运动员 6 名,女运动员 4 名,其中男、女队长各 1 名.选派 5 人外出比赛,按下列要求分别有多少种选法?

- (1)男运动员 3 名,女运动员 2 名;  
(2)至少有 1 名女运动员;  
(3)至少有 1 名队长;  
(4)既有队长,又有女运动员.

**变式** 蓝天救援队有男救援员 8 名,女救援员 4 名,现选派 5 名救援员参加一项救援.

- (1)若男救援员甲与女救援员乙必须参加,共有多少种不同的选法?  
(2)若救援员甲、乙均不能参加,共有多少种不同的选法?  
(3)若至少有一名男救援员和一名女救援员参加,共有多少种不同的选法?

### [素养小结]

有限制条件的抽(选)取问题,主要有两类:

(1)“含”与“不含”问题,常用直接分步法,即“含”的先取出,“不含”的可把所指元素去掉再取,分步计数.

(2)“至多”与“至少”问题,有两种解题思路:一是直接分类法,但注意分类要不重不漏;二是间接法,注意找准对立面,确保不重不漏.

### 角度2 “多面手”问题

**例2** 有11名外语翻译人员,其中5名英语翻译员,4名日语翻译员,另外2名英语、日语都精通,从中找出8人,使他们可以组成2个翻译小组,其中一组4人翻译英语,另外一组4人翻译日语,且这2个小组能同时工作,则这样的8人名单共有多少种?

**变式** 有6名工人,其中2人只会电工,3人只会木工,还有1人既会电工又会木工,若要选出电工2人、木工2人,且这4人能同时工作,则共有\_\_\_\_\_种不同的选法.

### [素养小结]

多面手问题以元素作为分析对象,按照选用几个多面手,多面手做什么建立分类讨论的标准,并且要注意做到不重复不遗漏.

## ◆ 要点二 分组、分配问题

### 角度1 不同元素分组、分配问题

**例3** 按下列要求分配6本不同的书,分别有多少种不同的分配方法?

(1)分成3份,1份1本,1份2本,1份3本;

(2)甲、乙、丙三人中,一人得1本,一人得2本,一人得3本;

(3)平均分成3份,每份2本;

(4)平均分配给甲、乙、丙三人,每人2本;

(5)分成3份,1份4本,另外2份每份1本;

(6)甲、乙、丙三人中,一人得4本,另外两人每人得1本.

**变式** 有 9 件不同的玩具,求符合下列条件的分配方案的种数.

- (1) 平均分成三堆;
- (2) 按数量分为 2,2,2,3 四堆;
- (3) 分给甲、乙、丙三个人,甲得 2 件,乙得 3 件,丙得 4 件;
- (4) 分给甲、乙、丙三个人,一人得 2 件,一人得 3 件,一人得 4 件.

## 角度 2 相同元素分组、分配问题

**例 4** 6 个相同的小球放入 4 个编号为 1,2,3,4 的盒子中,求下列问题中不同放法的种数.

- (1) 每个盒子都不空;
- (2) 恰有 1 个空盒子;
- (3) 恰有 2 个空盒子.

**变式** 某校准备参加高中数学联赛,把 16 个选手名额分配到高三年级的 1,2,3,4 四个班,每班至少 1 个名额.

- (1)不同的分配方案共有多少种?  
 (2)若每班名额不少于该班的序号数,则不同的分配方案共有多少种?

### [素养小结]

(1)不同元素分组问题属于“组合”问题,常见的分组问题有三种:

- ①完全均匀分组,每组的元素个数均相等,均匀分成  $n$  组,最后必须除以  $n!$ ;  
 ②部分均匀分组,应注意不要重复,有  $n$  组均匀,最后必须除以  $n!$ ;  
 ③完全非均匀分组,这种分组不考虑重复现象.

(2)相同元素分配问题的处理策略

①隔板法:将放有小球的盒子紧挨着成一行放置,便可看作排成一行的小球的空隙中插入了若干隔板,相邻两块隔板形成一个“盒”.每一种插入隔板的方法对应着小球放入盒子的一种方法,此法称为隔板法.隔板法专门解决相同元素的分配问题.

②将  $n$  个相同的元素分给  $m$  个不同的对象( $n \geq m$ ),每个对象至少分得一个元素,有  $C_{n-1}^{m-1}$  种方法.可描述为  $n-1$  个空中插入  $m-1$  块板.

## 6.3 二项式定理

### 6.3.1 二项式定理

#### 【学习目标】

- 能用计数原理证明二项式定理.
- 掌握二项式定理及二项展开式的通项.
- 能解决与二项式定理有关的简单问题.

#### 课堂明新知

知识导学 典例探究

#### ◆ 要点一 二项式定理及相关概念

##### 新知构建

|          |                                                                                                                  |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 二项式定理    | $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n (n \in \mathbf{N}^*)$ |
| 二项展开式    | 公式右边的多项式                                                                                                         |
| 二项式系数    | 公式右边各项的系数                                                                                                        |
| 二项展开式的通项 | $T_{k+1} =$                                                                                                      |

**【诊断分析】** 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) $(a+b)^n$  的展开式中共有  $n$  项. ( )  
 (2)二项式  $(a+b)^n$  与  $(b+a)^n$  的展开式的第  $r+1$  项一定相同. ( )

(3) $C_n^k a^{n-k} b^k$  是  $(a+b)^n$  的展开式的第  $k$  项. ( )

(4) $(a-b)^n$  与  $(a+b)^n$  的二项展开式的二项式系数相同. ( )

##### 典例解析

**例 1** 利用二项式定理展开下列各式:

(1) $(a+2b)^5$ ;

(2) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^7$ .